Séminaire Systèmes complexes en sciences sociales, 23 novembre 2018

La course à pied en équations

Amandine Aftalion

CNRS, Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales, EHESS, Paris, France

Sujet : la course à pied, du 100m au marathon

Course optimale : on se fixe une distance à courir,

Comment optimiser son effort, gérer ses ressources et les contraintes pour faire le meilleur temps?

Réponse mathématique : système d'équations différentielles, nous sommes capables de calculer, à chaque instant,

- la vitesse que doit avoir le coureur
- l'énergie qu'il a dépensé depuis le début de la course,
- la force de propulsion qu'il doit fournir.

- avec Pierre Martinon, Preprint 2018, Optimizing running a race on a curved track

- avec Emmanuel Trelat, en cours

- avec Cécile Appert et Henk Hilhorst, Nash equilibrium in a stochastic model of two competing athletes, J. of Stat. Mechanics, 2018,

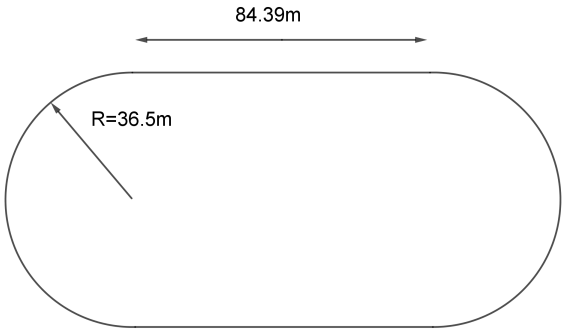
- How to run 100 meters? Siam J. App. Math. 2017,

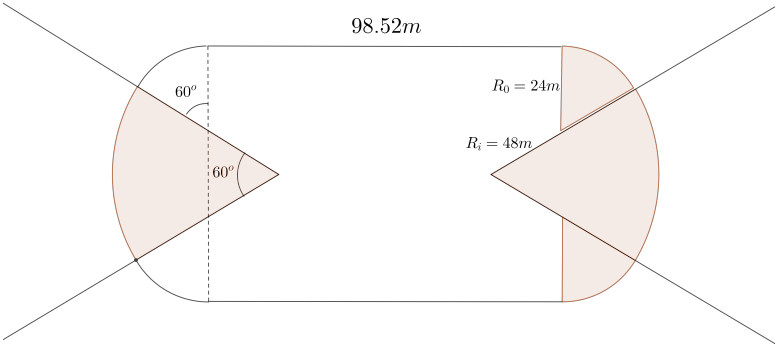
- avec L-H.Despaigne, A.Frentz, P.Gabet, A.Lajouanie, M-A.Lorthiois, L.Roquette, C.Vernet, Mathematics in Action, Vol. 7, 2016, How to identify the physiological parameters and run the optimal race?

- avec Frédéric Bonnans, Siam J. App. Math. 2014 Optimization of running strategies based on anaerobic energy and variations of velocity.

Les règles de construction des stades (IAAF) sont juste des zones de tolérance :
- ligne droite de 80 à 100m,
- demi cercle ou anse de panier.

Piste de $400m$ mesurée à $30cm$ du bord.





L'effet de la forme du stade ne semble pas avoir été étudié.

Comment calculer la vitesse et l'énergie du coureur?

Cela repose sur 2 lois physiques :

le principe fondamental de la dynamique

et la conservation de l'énergie

Problème de contrôle optimal pour minimiser le temps, étant donné la distance,

avec des contraintes.

Pour optimiser son effort, on court le 100m au 400m en accélérant très fort, puis en ralentissant en fin de course.

A partir du 800m, la course se fait avec une réaccélération en fin de course.

Déterminer l'effet de la force centrifuge et du couloir (mécanique)

et l'effet psychologique : attraction de quelqu'un devant et retard à bénéficier de nouveau de cette interaction quand on est doublé, motivation.

Toy model : Keller (1974)

Principe fondamental de la dynamique

$$\frac{dv}{dt} = f(t) - \frac{v}{\tau}$$

f force de propulsion, $0 \leq f \leq f_{max}$.

$\frac{v}{\tau}$: forces de frottement (résistance interne des muscles)

on peut ajouter une force de frottement due à l'air, ou au vent

Bilan d'énergie sur l'énergie aérobie. Contrainte $e \geq 0$.

$$\frac{de}{dt} = \sigma - fv$$

σ: consommation maximale d'O_2

On résout

$$\frac{dv}{dt} = f(t) - \frac{v}{\tau}$$

Contraintes: $0 \leq f \leq f_{max}$, $e \geq 0$. On tient compte de la $VO2$ variable en fonction de l'énergie :

$$\frac{de}{dt} = \alpha(e_0 - e) - fv$$

Conditions initiales: $v(0) = 0$, $e(0) = e_0$,
et finales: $e(T) = 0$
pour une distance $d = \int_0^T v(t)\, dt$ fixée.

Optimisation sur T

On peut prouver qu'on part à force de propulsion maximale $f = f_{max}$, et donc

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = f_{max}$$

ce qui détermine $v(t)$ comme une exponentielle croissante.

Mais on ne tient pas la force maximale toute la course.

Ensuite, la force diminue et la vitesse aussi. La diminution de vitesse est reliée au taux de croissance de la $VO2$:

$$\dot{v} + \alpha v = 0.$$

En fait, cela entraine une chûte de f trop brutale par rapport à la physiologie. Il faut rajouter une contrainte, une borne sur $f'(t)$. Le fractionné est utile pour augmenter sa capacité à varier f rapidement. Numériquement, on résout le système avec le logiciel BOCOP de l'INRIA.

Comment court-on le 100m? (Blake, 2011, Daegu)

10m : 1.87s Δt =1.87s

20m : 2.89s Δt =1.02s

30m : 3.82s Δt =0.93s

40m : 4.70s Δt =0.88s

50m : 5.56s Δt =0.86s

60m : 6.41s $\Delta t = 0.85$s

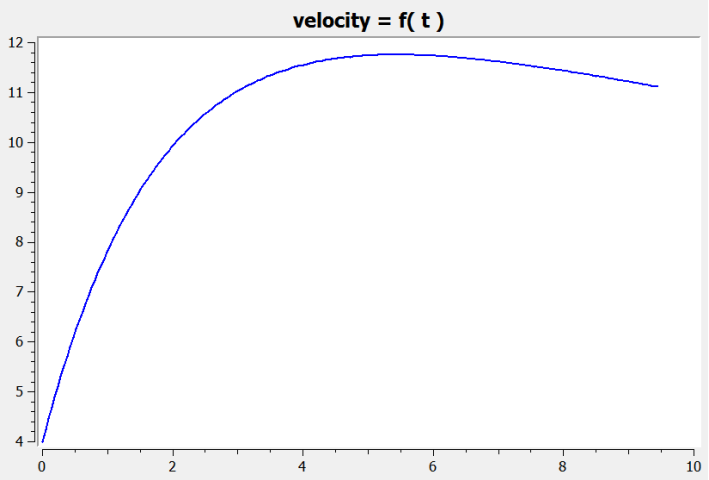
70m : 7.27s $\Delta t = 0.86$s

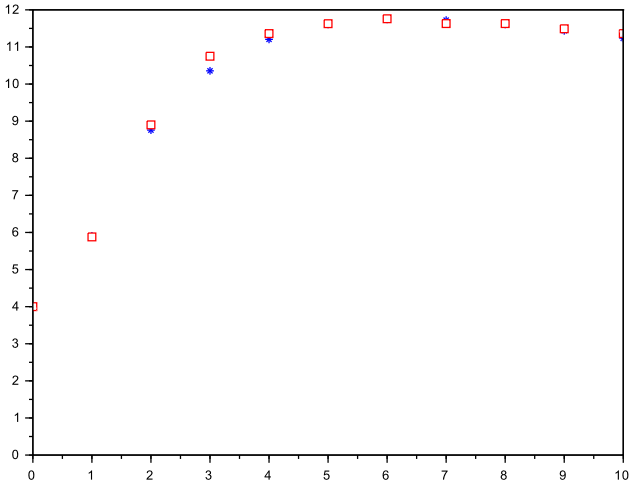
80m : 8.13s $\Delta t = 0.86$s

90m : 9.00s Δt =0.87s

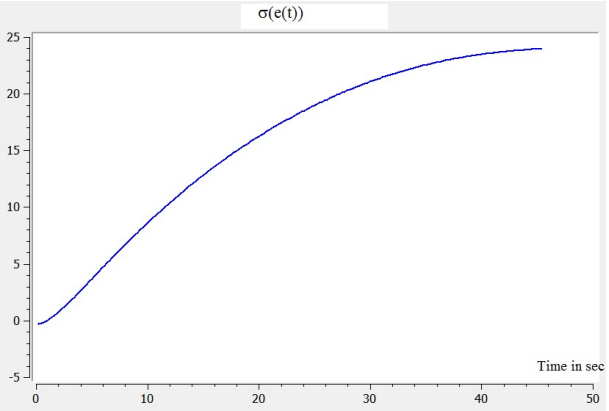
100m : 9.88s Δt =0.88s

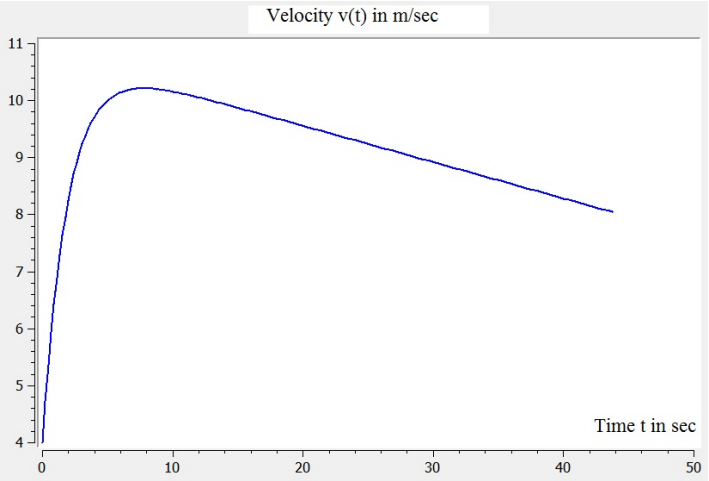
Ici, la courbe $v(t)$ en fonction du temps pour le 100m de Blake. A gauche, la vitesse calculée et à droite, les vitesses moyenne tous les 10m $(10/\Delta t)$ (carrés rouges), et calcul de vitesse moyenné tous les 10m (étoiles bleues).

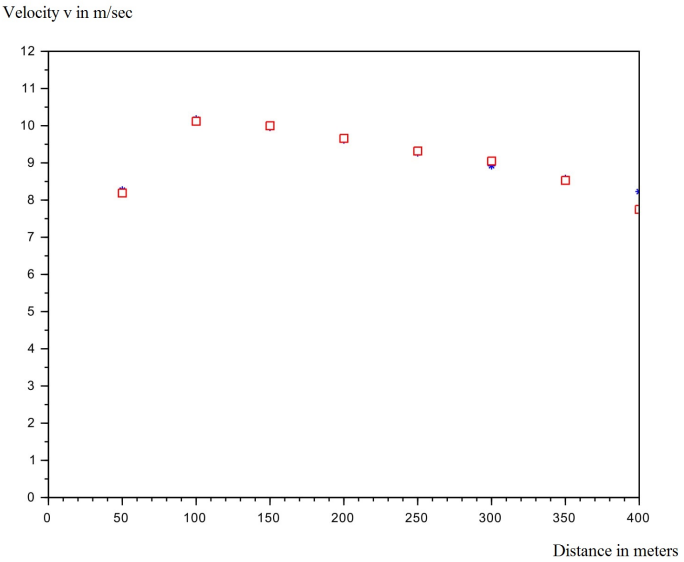




400m, $\sigma(e(t))$ et vitesse







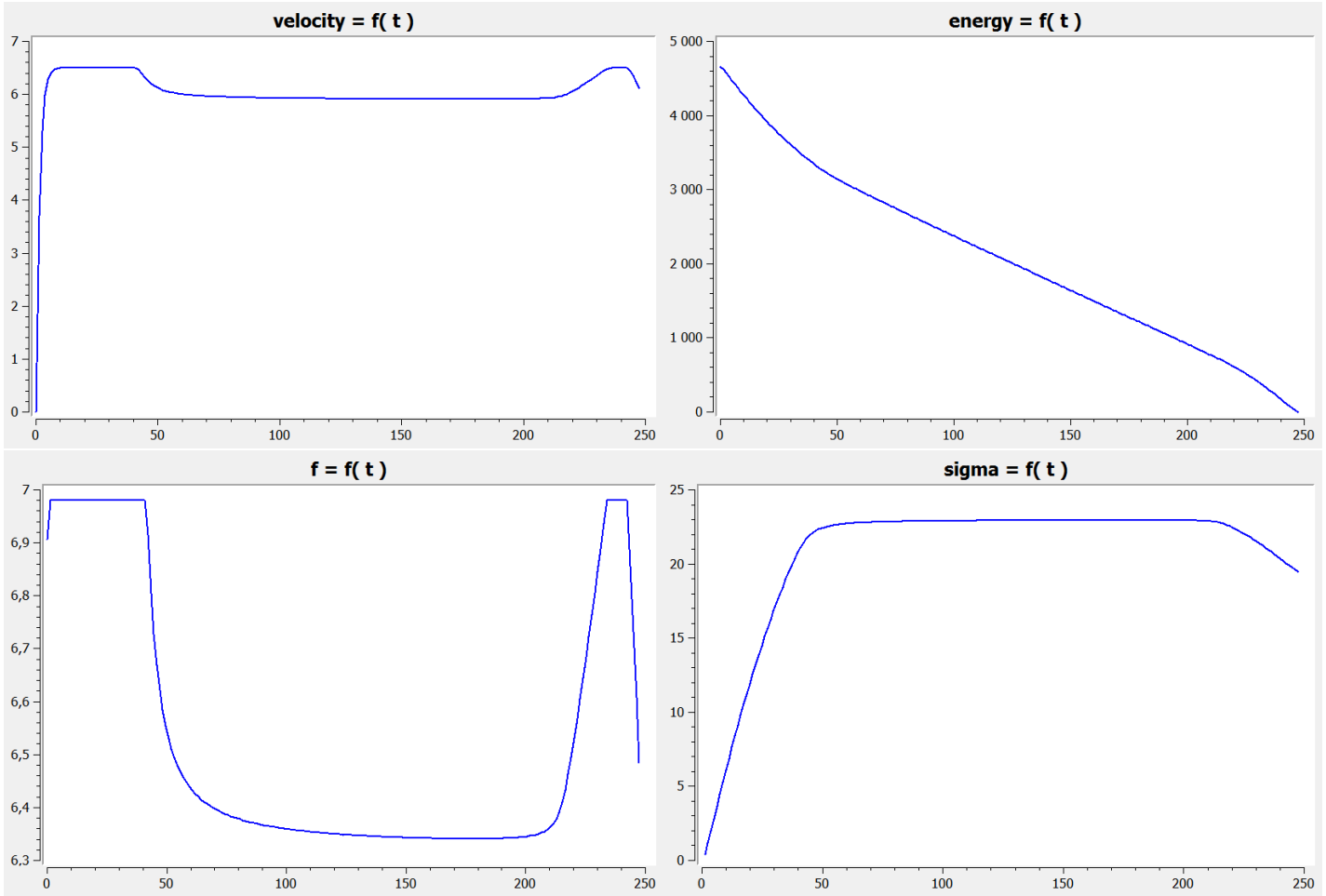
Pour des courses de durée inférieure à 3mn, σ est une fonction décroissante de e et donc croissante du temps, tandis que pour les courses plus longues, on atteint la valeur maximale de σ.

Cas 3: Chûte de σ dans la dernière partie de la course, quand e_{an} est trop petit.

$$\frac{de_{an}}{dt} = \sigma(e_{an}) - fv$$

$$\sigma(e_{an}) = \begin{cases} \bar{\sigma}\frac{e_{an}}{e^0_{an}e_{crit}} \text{ si } \frac{e_{an}}{e^0_{an}} < e_{crit} \\ \bar{\sigma} \text{ si } \frac{e_{an}}{e^0_{an}} \geq e_{crit},\ \lambda(e^0_{an} - e_{an}) \geq 1 \\ \lambda\bar{\sigma}(e^0_{an} - e_{an}) \text{ si } \lambda(e^0_{an} - e_{an}) < 1 \end{cases}$$

Comme σ décroit en fin de course, la vitesse peut augmenter à nouveau.



Un 1500m couru en 247.415 secondes (vitesse, force de propulsion, énergie et VO2 en fonction du temps).

Travail en cours avec Emmanuel Trelat

détermination du turnpike, c'est à dire, vitesse moyenne, force moyenne en milieu de course, énergie à décroissance linéaire.

Couplé à un modèle de contrôle moteur (Pessiglione et al), qui permet de comprendre le début et fin de course.

Les calculs reposent sur la donnée de 4 paramètres:

$VO2_{max}$ que l'on appelle σ

e_0, stock d'énergie anaérobie

τ, temps caractéristique d'accélération, (dépend du coureur et de la piste)

f_{max}, la force de propulsion maximale

Si on connaît $VO2_{max}$ et des données d'une course (temps de passage sur un 80m et un 1500m), nous avons un protocole qui identifie les autres paramètres. (Article paru dans Mathematics in Action 2016).

Modèle de force centrifuge (avec P.Martinon)

Le coureur est penché avec un angle α par rapport à la verticale. Equation du mouvement sur directions normale et verticale

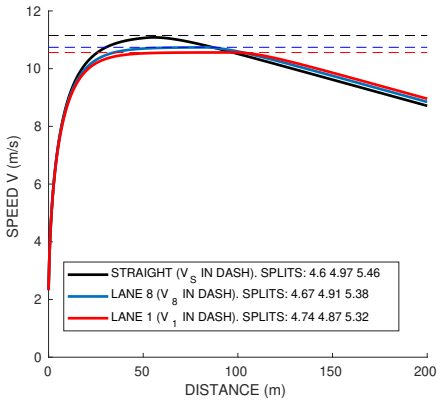
$$\frac{v^2}{R} = N \sin\alpha \qquad g = N \cos\alpha$$

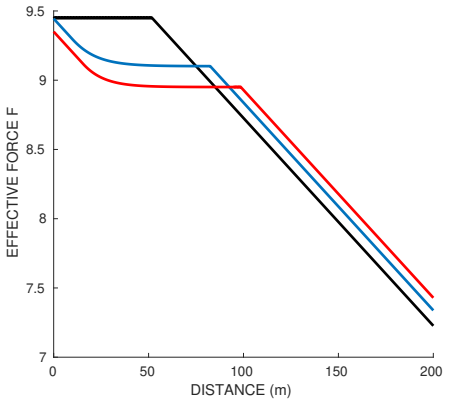
N est l'opposé de l'action exercée par le coureur sur le sol (on ignore la propulsion, moyenné par foulée). La force centrifuge ne travaille pas! Contrainte sur le OCP. R dépend de la ligne et de la piste.

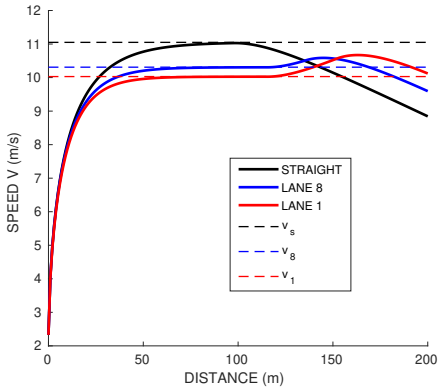
$$F^2 = f^2 + N^2 = f^2 + g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 \leq F_M^2$$

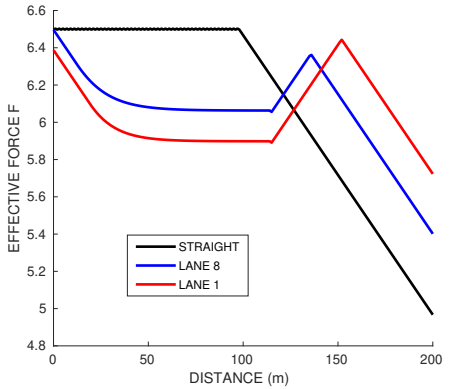
200 mètres, départ en courbe 2 types de coureurs, avec grande et petite force.

On observe
- départ plus lent
- $v = f\tau$ et $f_M^2 = \frac{v^2}{\tau^2} + \frac{v^4}{R^2}$, ne dépend pas de l'énergie,
-quand force centrifuge disparait, soit la force continue de diminuer,
soit il reste assez d'énergie pour augmenter la force





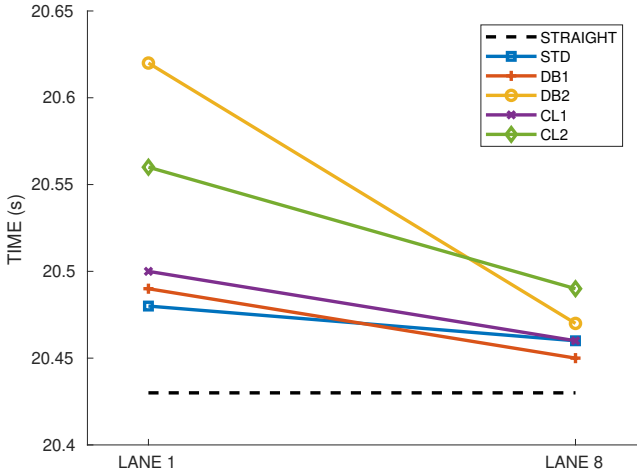


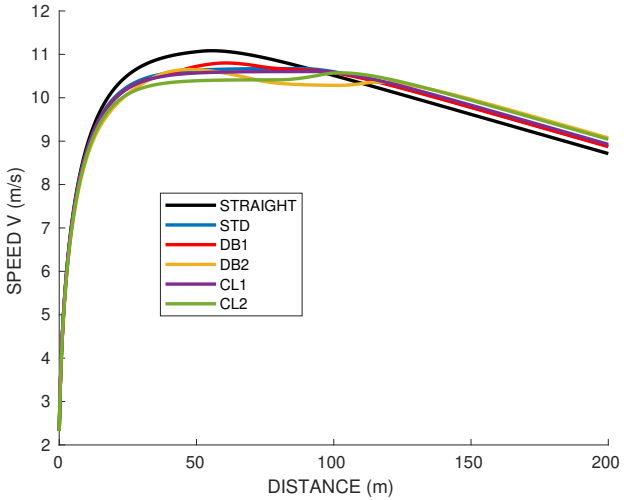


Les formes de piste

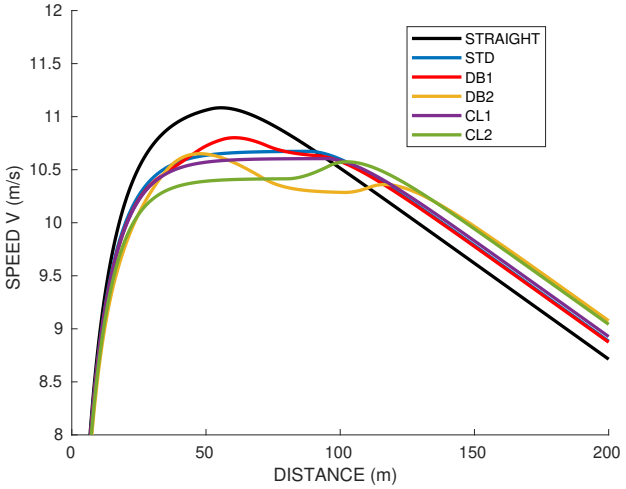
Track	Straight	Circle 1	Circle 2
Standard	$84.39m$	$(36.50m, 180°)$	N/A
Double Bend 1	$79.996m$	$(34.00m, 2 \times 70°)$	$(51.543m, 40°)$
Double Bend 2	$98.52m$	$(24.00m, 2 \times 60°)$	$(48.00m, 60°)$

On peut aussi imaginer relier la ligne droite au cercle par une clothoide (la courbure augmente linéairement), comme pour les trains.





La DB2 (anse de panier avec ligne droite de 100m, Berlin) est plus lente. Pour les lignes extérieures, la DB1 (ligne droite 80m) est la plus rapide (Bruxelles) mais la standard est celle avec le moins de différence entre les couloirs.



Avec deux coureurs

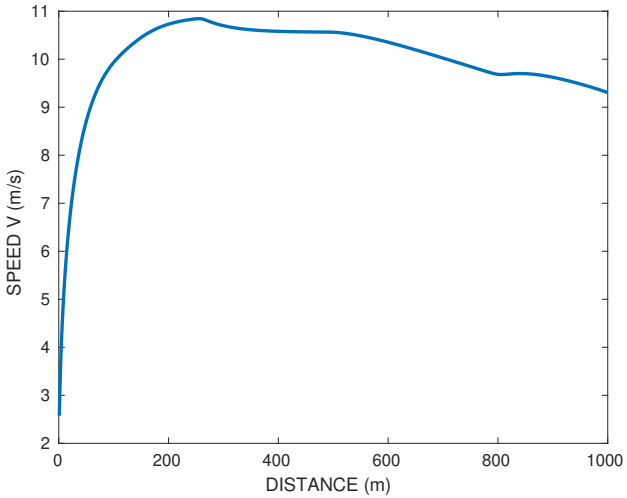
$$\frac{dv_1(t)}{dt} = f_1(t) - \frac{v_1(t)}{\tau_1}(1 - F(x_1, x_2))$$

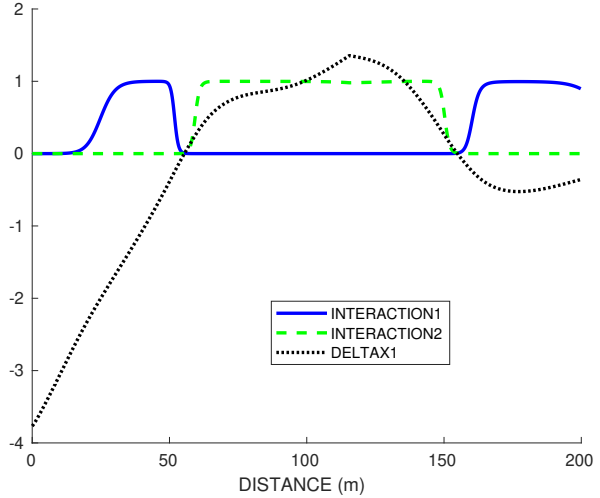
On diminue le frottement effectif. F est non nulle (créneau) si

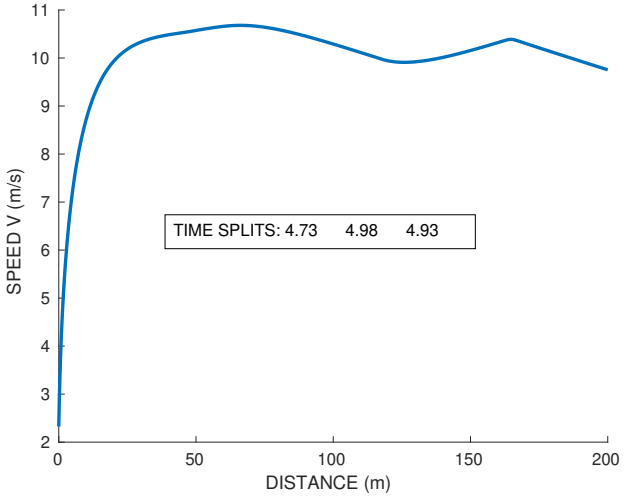
- $0 < x_2 - x_1 < 2$ (on a quelqu'un devant)

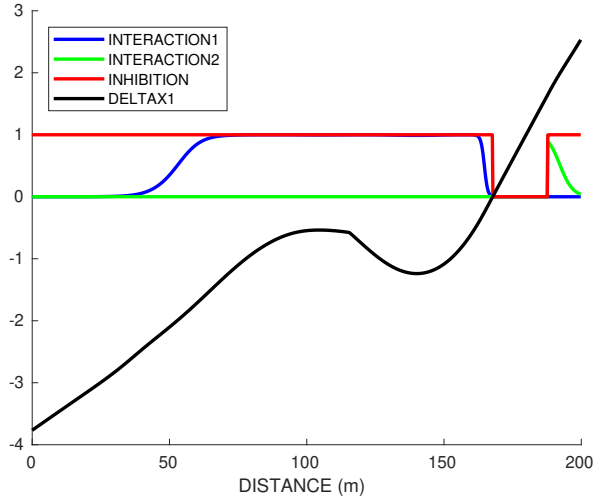
- $((x_2 - x_1)(t - \eta))\,(x_2 - x_1)(t) > 0$: pas de dépassement entre $t - \eta$ et t. Problème de délai inspiré par les modèles de marche en comportement de foule, C.Appert et al :
$a(t) = C\Delta v(t - \eta)/(\Delta x)^\gamma$.
Il y a un temps de réaction! Difficile mathématiquement et numériquement.

Objectif : on minimise $\min(T_1, T_2) + w * (T_1 + T_2)$


SPEED V (m/s)
DISTANCE (m)

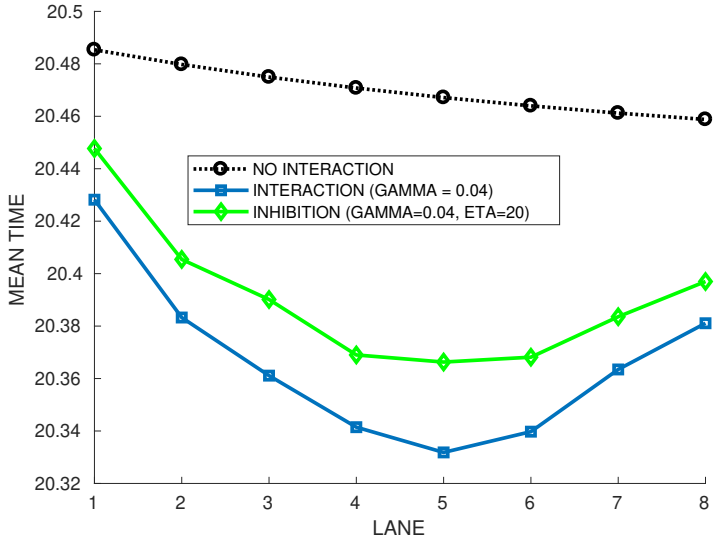

INTERACTION1
INTERACTION2
DELTAX1
DISTANCE (m)


TIME SPLITS: 4.73 4.98 4.93
SPEED V (m/s)
DISTANCE (m)


INTERACTION1
INTERACTION2
INHIBITION
DELTAX1
DISTANCE (m)

La course à deux coureurs permet de baisser le temps final, même pour celui qui est derrière.

Si on met un coureur contre lui même sur 2 couloirs adjacents. Il vaut mieux être à l'extérieur. Moyenne des temps sur les couloirs



Cohérent avec le tirage de l'IAAF: les 4 meilleurs en couloir 3 à 6, ensuite 7,8, puis 1,2.

C’est un modèle déterministe de contrôle optimal, pas la théorie des jeux.

Avec C.Appert et H.Hilhorst, on a une modélisation de type théorie des jeux mais qui est simpliste au niveau des paramètres physiologiques.

Modèle stochastique de compétition entre 2 athlètes qui ont une différence de niveau (force, énergie, VO2 ...). Les athlètes interagissent uniquement par leur choix de stratégie. On peut construire un équilibre de Nash comme somme d’une distribution continue et d’une masse de Dirac. L’athlète le plus faible peut garder une chance de gagner.

Mécanique pas inclue.

A quoi peut servir le modèle mathématique déterministe?

On peut prédire comment l'évolution des paramètres fait évoluer la performance.

On peut voir quel est l'effet de la ligne ou de la forme de pistes.

Quelle est la stratégie de course? Pas forcément le meilleur temps, mais finir premier?

Si on part trop fort (on garde sa force maximale trop longtemps), on ne fera pas le meilleur temps, mais on a des chances de semer l'adversaire. Si on reste juste un peu derrière, on va gagner de l'énergie et redoubler.

Projet avec l'institut des sciences du mouvement (Marseille) et TIMC (Grenoble) pour faire des mesures...