

Forum “Les fondamentales”, La Sorbonne, 15 novembre 2013

**Des mathématiques pour
comprendre la physique de demain**

Amandine Aftalion

CNRS, Laboratoire de Mathématiques de Versailles

Merci d'être venus ici pour écouter ce qui motive les chercheurs et savoir s'il reste des choses à trouver.

La peinture du plafond me paraît parfaitement adaptée au sujet qui nous occupe aujourd'hui puisqu'il s'agit d'un candidat qui se présente devant **la Vérité, entourée de la Philosophie, la Science et l'Histoire**. La Vérité est ici représentée sous les traits d'une déesse.

La recherche est certainement une quête de vérité.

Newton parle du grand océan de la vérité qui étale devant lui tout ce qui reste à découvrir.

En mathématiques, parfois un puzzle dont on assemble les morceaux?

Y a-t-il vraiment encore des choses à trouver? en particulier en mathématiques?

OUI!

Souvent il est accepté que les mathématiques permettent de faire des calculs utiles à d'autres disciplines, comme la physique, la biologie, la chimie. Il y a des mathématiques derrière la prévision du temps ou le décollage d'une fusée, dans la puce de votre carte vitale, mais pas seulement.

Les mathématiques ne se réduisent pas à la simulation numérique.

Ce sont souvent les propriétés mathématiques des objets considérés qui permettent de comprendre ou améliorer les modèles, les mises en équations des phénomènes.

Une recherche active et importante existe en **mathématiques pures ou abstraites**. Les mathématiques pures perfectionnent la boîte à outils sans but de l'application. Il s'agit

- **développer des théories,**
- d'établir des théorèmes,
- résoudre des questions d'existence de certains objets,
- obtenir des propriétés qualitatives.

Quand un problème posé par une autre science émerge, on est alors bien content que le bon outil existe déjà et soit opérationnel.

Certaines équations ou certains outils sont similaires dans des domaines très variés.

Dans la suite de l'exposé,

- motivé par la physique de la matière condensée: à très basse température.
- planification de la préparation physique d'un sportif.
- forme des cheveux

Qu'est ce qu'un condensat de Bose-Einstein?

1925: prédiction par **Einstein** d'un **nouvel état de la matière**, à très basse température, qui se comporterait comme un **gaz**.

1995: **Obtention de ce nouvel état de la matière appelé condensat de Bose Einstein**

2001: Prix Nobel de Physique (**Cornell, Wiemann, Ketterle**)

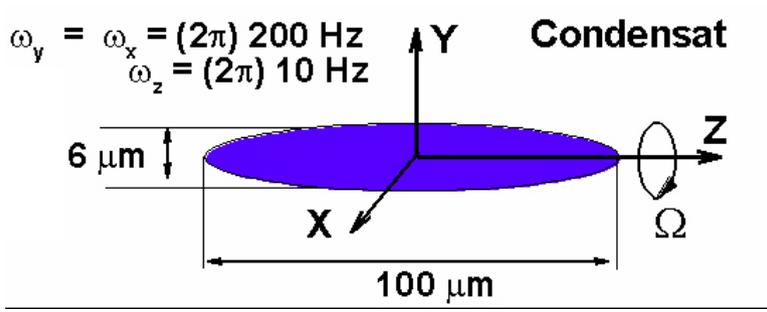
Un des laboratoires à la pointe : le laboratoire Kastler Brossel (prix Nobel de **Cohen-Tannoudji** en 97, groupe de **Jean Dalibard**).

Applications nombreuses et prometteuses, une découverte qui va **révolutionner notre avenir**. Un nouveau laser de matière?

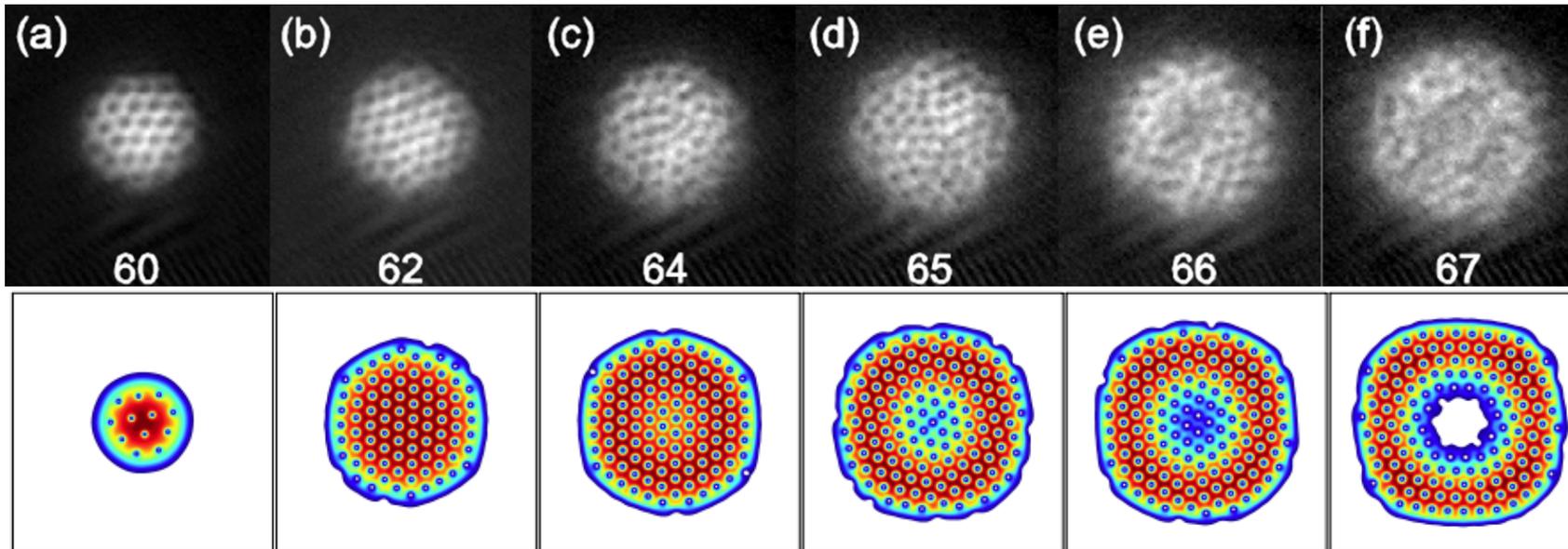
Une des propriétés: **les condensats sont des fluides quantiques qui tournent par la nucléation de tourbillons ou vortex**.



Mise en rotation du condensat à l'aide d'une cuillère magnétique



Contrairement au café, le condensat tourne par la nucléation de tourbillons quantiques



Et les mathématiques?

Etape 1 : il faut trouver des variables pour décrire les phénomènes.

Le condensat est décrit par un nombre complexe ψ , $\psi = |\psi|e^{i\phi}$.

$|\psi|$ représente la densité d'atomes.

Si $|\psi| = 0$, il n'y a pas d'atomes, c'est noir.

dérivée de la phase ϕ donne la vitesse.

Si ψ s'annule en un point, $\psi \sim re^{i\theta}$: rotation de l'angle de 2π autour du zéro. Ce sont les tourbillons.

But: trouver les lieux où la fonction ψ s'annule.

Etape 2 : Les systèmes physiques à l'équilibre sont dans un état qui minimisent une certaine énergie (terme cinétique, potentiel, de rotation)

L'énergie est une fonction du nombre complexe ψ

$$E(\psi) = \int \frac{1}{2} |\nabla\psi - i\Omega \times r\psi|^2 + \frac{1}{2} r^2 |\psi|^2 (1 - \Omega^2) + \frac{1}{2} Na |\psi|^4,$$

Ω rotation, $r = (x, y)$ position, N nombre de particules, a longueur de scattering qui décrit les interactions entre atomes.

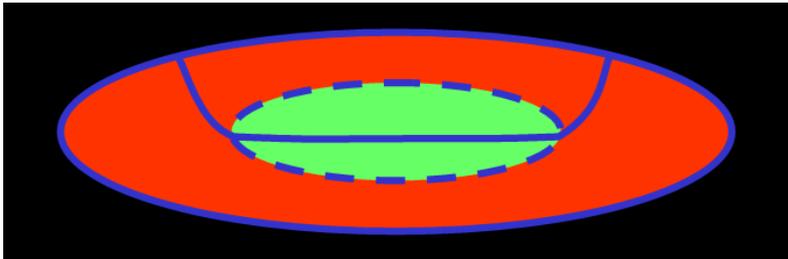
La minimisation de l'énergie conduit à un point d'équilibre donc une équation (équation d'Euler-Lagrange).

Comme ψ dépend de la position du point, \implies Une équation aux dérivées partielles, généralisation des équations différentielles
équation de Schrödinger.

Résultats marquants

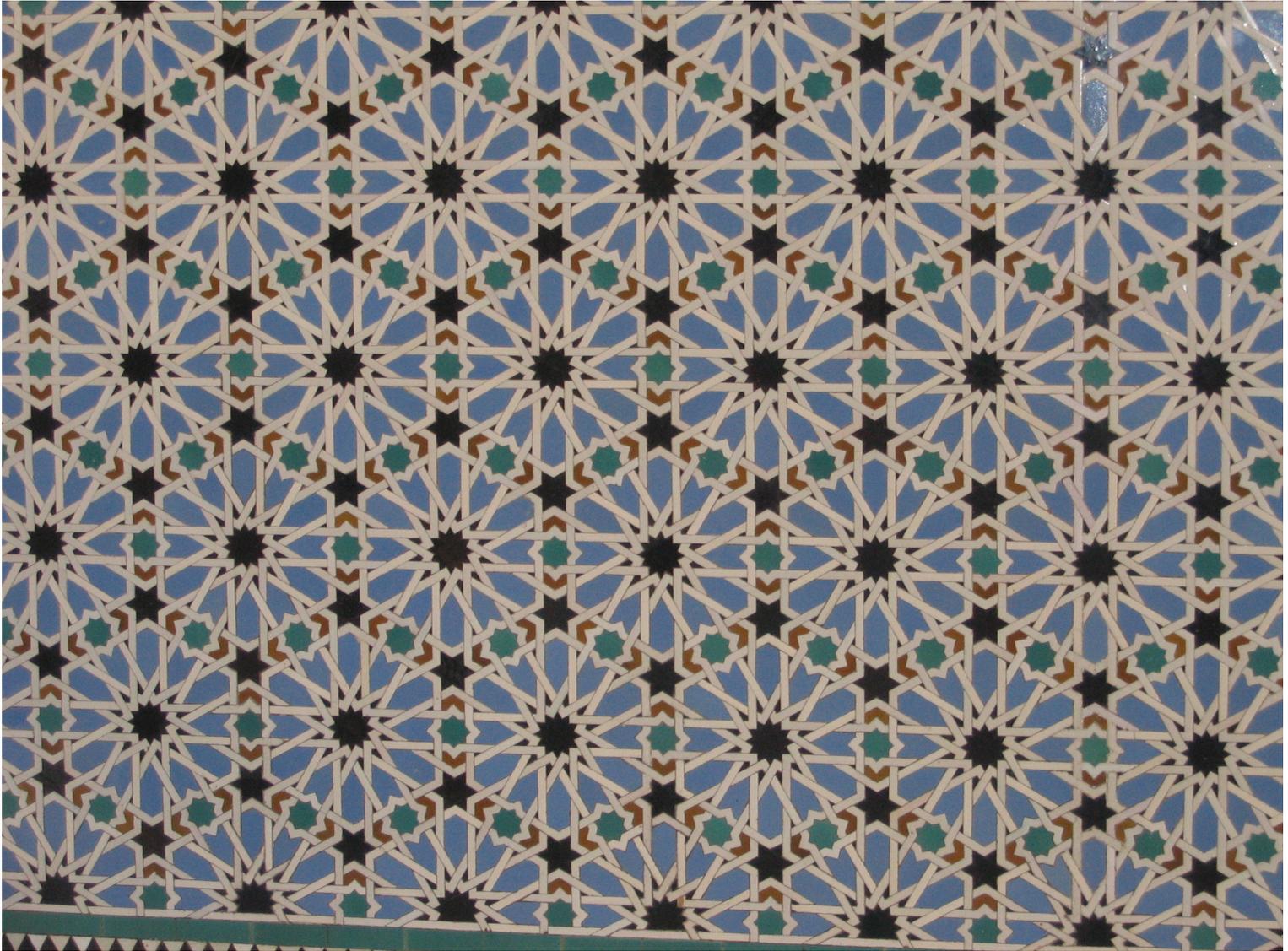
Etude des propriétés mathématiques des solutions de cette équation, estimation de l'énergie.

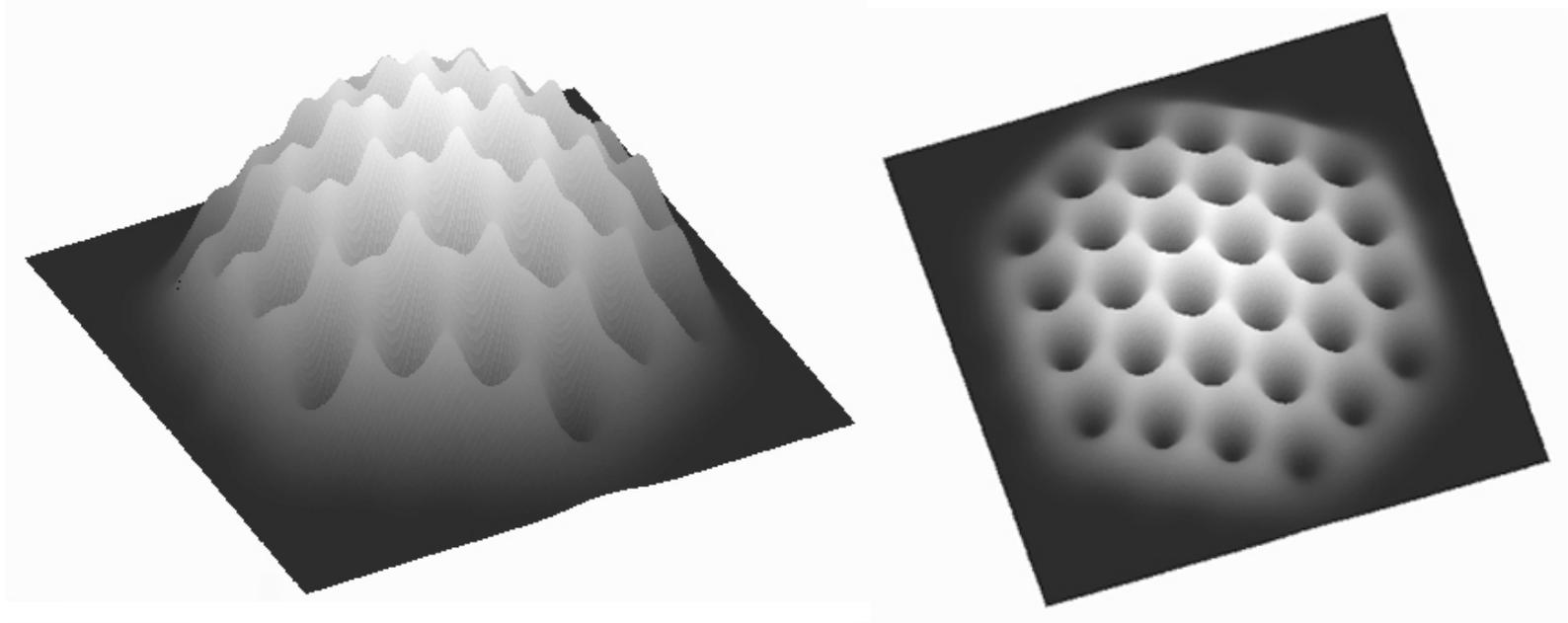
- **Cas d'un seul tourbillon** : on sait exactement caractériser sa forme par une équation



- **Cas de la rotation rapide** : étude des réseaux de tourbillons

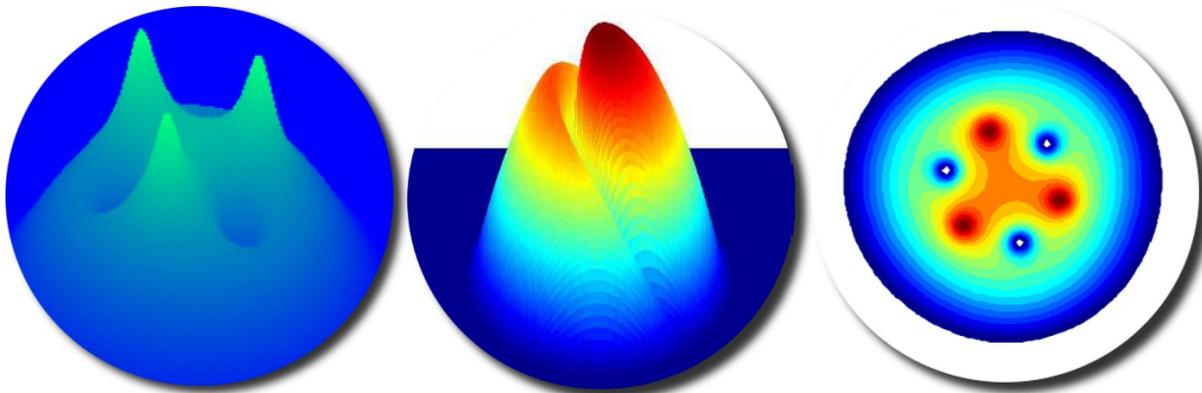
Qu'est ce qu'un réseau hexagonal?





Caractérisation du réseau comme objet mathématique:
introduction d'espaces abstraits (espaces de Hilbert) -analyse
fonctionnelle, équations aux dérivées partielles
questions reliées: analyse complexe, algèbre et théorie des
nombres (fonction Theta de Jacobi et propriétés algébriques de
ces fonctions)

Interaction de 2 condensats. Interaction des réseaux et réseaux carrés. **Brisure de symétrie, tourbillons et pics**



Les simulations numériques orientent sur les théorèmes à démontrer.

Universalité de certaines questions ou certains outils

Une même équation peut décrire des phénomènes très variés.

Plannification de la préparation physique d'un sportif

On se fixe une distance à courir, par exemple $d = 800m$.

A partir d'équations mathématiques, nous avons un modèle capable de prédire comment doit se dérouler la course optimale. Nous savons calculer, à chaque instant,

- la vitesse que doit avoir le coureur
- l'énergie qu'il a dépensé depuis le début de la course.

Cela repose sur le principe fondamental de la dynamique et des bilans d'énergie.

Cela se généralise au vélo ou à la natation.

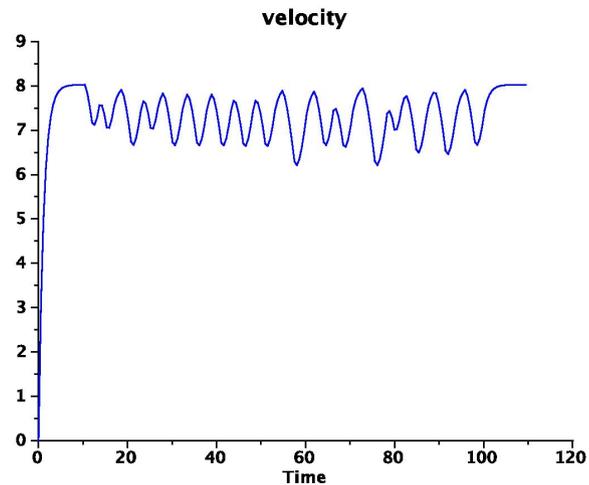
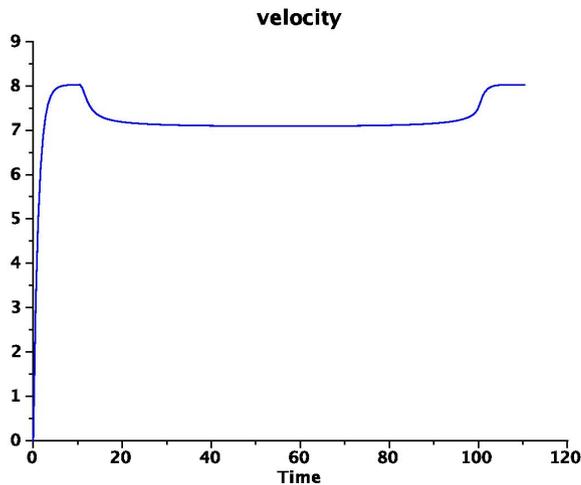
Comment calculer la vitesse et l'énergie d'un coureur?

Un système d'équations différentielles : des équations reliant

- la vitesse (et l'accélération)
- la force de propulsion
- les forces de frottement
- l'énergie (énergie aérobie et anaérobie)

Les bilans d'énergie font intervenir la consommation maximale d'oxygène ($V_{O2_{max}}$) et une recréation d'énergie quand on ralentit. Le système est couplé à des conditions initiales et des contraintes. La forme du terme de recréation nous est suggérée par des propriétés de convexité du hamiltonien.

Pour des courses allant du 400m au marathon, nos résultats amènent à deux conclusions qui renforcent certaines observations physiologiques :



l'effet " negative split " : il vaut mieux courir la deuxième partie de la course plus vite que la première (figure gauche).

il faut varier sa vitesse, ce qui permet de gagner 0.7% sur 800m: quand on ralentit, on recrée de l'énergie, ce qui améliore le temps de course. (figure droite)

Pour améliorer sa performance, il faut développer à la fois sa capacité d'énergie anaérobie et sa VO_{2max} , et varier sa vitesse.

Apport des mathématiques:

- Simulations numériques
- Outils rigoureux pour justifier les observations des physiciens et améliorer les modèles.

10aine d'années et de collaborateurs, 20aine de publications.

Comment se passe la recherche en mathématiques?

- isoler un problème et définir le sujet de “l'exercice”: nécessite de la culture générale, une bonne connaissance des outils, curiosité. Travail collectif, discussions, plusieurs années parfois.
- résoudre la question: apporter une preuve (décortiquer en sous-questions, avancée par petits pas) simulations numériques ou papier et stylo.
- une question en apporte une autre: collaborations, outils variés
- exposé des résultats dans des colloques internationaux, partage des connaissances, nouvelles questions et suggestions

Chaque résultat engendre de nouvelles questions, et plus on avance, plus il reste de choses à découvrir.

La recherche nécessite curiosité et grande culture générale.